##### Resumo da Pesquisa PPGEM

Luan Henrique Sirtoli

03 de abril de 2019

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

Comentários preliminares

Pode falar da importância do problema de autovalor.

Falar do método dos elementos de contorno e a formulação MEcid.

Falar da formulação autorregularizada

Objetivo

Considerando os bons resultados da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta, em suas aplicações aos problemas ditos diretos governados pela Equação de Helmholtz, objetiva-se elaborar matematicamente um modelo matricial autoregularizado adequado para calcular os autovalores ou freqüências naturais associados em duas dimensões.

Retrospectiva bibliográfica

## 1 Início

A presente pesquisa fundamenta-se no problema encontrado no artigo [1], que será discorrido no capítulo 2 deste resumo. No capítulo 3 iremos introduzir a nova pesquisa sendo abordada, e os avanços encontrados até a presente data.

## 2 Formulação Autorregularizada

Utilizando conceitos utilizados nos artigos [2], [3], [4], [5] e [6], inicia-se o resumo introduzindo a Equação de Helmholtz em forma de um problema de autovalor, utilizando notação indicial.

(1)

Nessa equação, o autovalor é um escalar, tendo o quadrado do mesmo, o valor de .Assim, num domínio bidimensional e isotrópico, onde limitado por um contorno .

A formulação do Método dos Elementos de Contorno **(MEC)** se inicia com o estabelecimento de uma equação integral no qual uma função auxiliar é utilizada, assim, formando a equação:

(2)

Neste modelo proposto, equivale à Solução Fundamental de Laplace subtraida de uma função adicional , assim:

(3)

Como conhecido no MEC, os valores desses termos são:

(4)

(5)

A função é o Tensor de Galerkin, associado ao problema de LaPlace. Assim:

(6)

Assim, a equação integral dada na Equação (2) será de tal forma:

(7)

Para deduzirmos a forma inversa da integral de contorno, faremos a integração por partes e aplicamos o Teorema da Divergência, como previamente ensinados no MEC. Esses procedimentos são aplicados em ambos os lados da Equação (7), de forma que dois termos da integral se cancelam, resultando:

(8)

A equação anterior introduziu duas novas funções, nas quais são:

(9)

(10)

Ainda assim, uma integral de domínio persiste no lado direito da Equação (8). Assim, é utilizado o DIBEM (Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions), para resolvê-la. Assim, o núcleo completo dessa integral de domínio será aproximado utilizando funções de base radial , onde o argumento é composto pela distância Euclidiana entre os pontos base e os pontos de domínio **X**.

O núcleo agora é não-singular, quando os pontos fonte são coincidentes com os pontos de campo, e consequentemente, nenhum procedimento de regularização é necessário. De forma parecida ao DRBEM (Dual Reciprocity Boundary Element Method), o método proposto transforma a integral d domínio utilizando uma função de interpolação primitiva , na qual sua relação com a função radial é apresentada abaixo:

= (11)

Para cada ponto fonte dado pela Equação (11), é feita uma leitura de todos os pontos base em relação aos pontos do domínio **X**, com peso dos coeficientes . Deve-se lembrar que o número de pontos base devem ser iguais ao número de nós no contorno.

Após os procedimentos de discretização padrão do BEM, pode se escrever uma equação matricial a partir da Equação (8) da seguinte forma:

(12)

Na equação matricial (12):

• Os coeficientes e são referentes, respectivamente, às integrações e , no contorno.

• Os coeficientes e são referentes, respectivamente, às integrações e sua derivativa normal , no contorno.

• O vetor representa a integração da função radial auxiliar .

Para problemas de Helmholtz, o DIBEM deve considerar os valores nodais do potencial explicitamente, porém, na Equação (12) os valores potenciais nodais estão implícitos no vetor . Esse potencial deve ser explicito para permitir a construção da matriz de inércia.

Desta forma, o vetor deve ser reescrito da seguinte forma:

(13)

Os coeficientes do último vetor podem ser calculados resolvendo um sistema de equações algébricas, da seguinte forma:

(14)

Deve ser ressaltado, que ao utilizar o DIBEM, a solução fundamental compõe o núcleo a ser interpolado. Na equação (14) a matriz diagonal é composta pelo Tensor de Galerkin .

Após a implementação do algebrismo matricial, o sistema de elementos de contorno final pode ser escrito da seguinte forma:

(15)

E é a partir da Equação (15) que iniciamos o trabalho da presente pesquisa.

## 3 O problema de autovalor associado

Preliminares

Fisicamente, um problema de autovalor consiste de um problema em que se procura configurações autoequilibradas na condição de vibração livre, nos quais os valores das condições de Neumann são nulos. As forças e inércia e as forças elásticas, no caso de um problema elástico, se equilibram sem a presença de forças externas. Este mesmo conceito pode ser aplicado aos problemas de Helmholtz, que são casos escalares, que também englobam problemas mais simples da elasticidade como casos de torção, deflexão de membranas e vibração de barras.

Inicialmente, é interessante escrever o sistema do MEC usando submatrizes, nas quais os valores prescritos de u e q sejam claramente identificados, conforme mostrado a seguir:

(16)

Como os valores prescritos de u e q são nulos para vibração livre, obtém-se então o seguinte sistema de duas equações acopladas:

(17)

(18)

Seguindo os mesmos passos apresentados no trabalho de Loeffler [...], a partir da Equação (17), isola-se o termo , na forma mostrada a seguir:

**Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método dos Elementos de Contorno** Publicado no Caderno de Engenharia Civil da Revista Brasileira de Engenharia (RBE), Vol 4, n° 2, pag. 5-23, 1986 ISSN 0102-2695.

(19)

Encontra-se aqui uma primeira dificuldade, cuja solução é fundamental para que o modelo proposto apresente resultados satisfatórios: a inversão da soma de duas matrizes, uma delas multiplicada pelo escalar λ, que precisa ser explicitado de uma forma aproximada.

Aproximação no cálculo de q

# Embora não seja um tema muito comum, há algumas propostas para solução da inversa da soma de duas matrizes. A primeira delas é a extensão da Identidade de Hua [Cohn, 1991] da álgebra polinomial. Sua adaptação para a álgebra matricial é apresentada no excelente livro de James R. Schott, Matrix Algebra for Statistics, mostrada a seguir:

# Further Algebra and Applications, Author: Cohn, Paul M. ISBN 978-1-85233-667-7 Springer, uk 1991

Matrix Algebra for Statistics, Author: James R. Schott.

Pode-se notar que a Identidade de Hua não elimina a necessidade de se calcular a inversa de uma soma de matrizes. A sua utilização na literatura se faz visando um melhor condicionamento das operações matriciais. Contudo, particularmente no caso deste trabalho, a Identidade de Hua pode propiciar uma forma de melhor controle do coeficiente λ.

A expressão anterior pode ser simplificada de modo conveniente, fazendo uma operação adequada no segundo termo do seu lado direito, ou seja, usando a propriedade que estabelece que a inversa do produto de duas matrizes é produto das inversas, mas na ordem inversa:

Então:

Considerando que:

e

O coeficiente λ pode melhor ser visualizado:

# 

Fazendo então:

Tem-se que:

] (aaa)

Dentro da mesma estrutura matemática pode-se alterar a ordem das matrizes, considerando que:

e

Assim, usando diretamente a Identidade de Hua, tem-se:

De modo que se pode fazer:

Então:

] (DDD)

Nesta última expressão foi desprezado o termo mostrado a seguir, sob a hipótese de que para altas frequências o produto da matriz S pelo coeficiente λ se tornará efetivamente pouco importante e que baixíssimas frequências não são cabíveis no modelo:

(ccc)

Uma consideração similar a esta não é possível de fazer, pelo menos dentro de uma expectativa física de resposta, no primeiro caso mostrado, em que:

e

Além disso, sem a consideração apresentada na Eq. (ccc), aparece uma diferença muito mais importante entre as expressões (aaa) e (bbb) que pode ser identificada apenas após a montagem completa do sistema matricial: a ordem das potências que envolvem o coeficiente λ. Seguindo esta última estrutura, a equação característica teria ordem 4, uma estrutura mais coerente com o problema que se quer resolver, enquanto na estrutura anterior teria apenas ordem 3.

A hipótese adotada pode ser comprovada através de outra modelagem para a inversa da soma de matrizes. É inspirada nas seguintes expressões binomiais:

1/(a + b) = sum_(n=0)^∞ (a^n (-b)^(-n))/b for abs(a)<abs(b)

1/(a + b) = sum_(n=0)^∞ (b^n (-a)^(-n))/a for abs(b)<abs(a)

Considere o primeiro caso, em que λB seja maior do que A. Então, considerando apenas dois termos da série:

Logo:

Substituindo as matrizes A e B respectivamente por Guu e Suu :

]

Ou melhor:

Onde:

Esta expressão é idêntica a Eq. (DDD), demonstrando que a hipótese assumida desprezando-se a matriz (λSuu)-1 é coerente com a expansão em dois termos da série apresentada.

Operacionalização final

Assim, definida a inversa, faz-se:

Substituindo a expressão anterior na Equação (19) tem-se:

(20)

(21)

Substituindo o termo da Equação (21) na Equação (18), obtém-se:

(22)

Fazendo a distribuição dos termos, chega-se à seguinte equação:

(23)

Para simplificar, definem-se os seguintes termos:

•

•

•

•

Chega-se assim, a seguinte equação:

(24)

Assim, distribuindo  na Equação (24):

(25)

Multiplicando toda a equação por e isolando os termos afins:

(26)

Assim, fazendo as seguintes substituições:

•

•

•

•

•

Com a definição destas novas matrizes, o sistema completo por ser resumido na forma:

(27)

NO CURSO DE CÁLCULO MOSTRAMOS QUE NÃO SE PODE FAZER uA, uB ETC...

Daí resulta a seguinte equação, que tem a forma de uma equação característica:

(28)

### 3.1 Proposição de Przeminiecky

De acordo com Przeminiecky [7], no capítulo 12.4 de seu livro, o sistema a seguir se enquadra como um problema de autovalor quadrático [ref]:

(29)

De acordo com [...e ....] sistemas matriciais desta ordem aparecem na solução de problemas de análise estrutural e na simulação aústica de materiais poro-elásticos.

A novel deflation technique for solving quadratic eigenvalue problems, moody, t. Chu, Tsung-min and Wen-Wei Lin, ……

**NUMERICAL SOLUTION OF QUADRATIC EIGENVALUE**

**PROBLEMS WITH STRUCTURE-PRESERVING METHODS***∗*

TSUNG-MIN HWANG*†*, WEN-WEI LIN*‡*, AND VOLKER MEHRMANN

Para esse sistema, Przeminiecky afirma que se pode assumir que a solução possui a forma:

(30)

Neste sistema proposto u(X,t) seria o vetor dos deslocamentos ou grandeza primal qualquer, dado pelo produto de uma amplitude U(X) e uma função do tempo, expressa em termos de um parâmetro A proposta de solução é a mesma encontrada nos livros de calculo para resolver uma equação diferencial, transformando-a numa equação algébrica. Aqui, intenta-se eliminar as derivadas temporais da equação matricial.

Assim, a Equação (29) torna-se:

(31)

Que possui soluções não triviais desde que o seguinte determinante seja nulo, evitando assim a pré-multiplicação por uma inversa do sistema matricial em questão:

(32)

Para sistemas com diversos graus de liberdade, a formulação das equações (31) e (32) se torna inconveniente. Assim, utilizando um método que foi proposto inicalmente por Duncan em 1933 [referêencia], pode-se reduzir essas equações a uma forma padrão. Contudo, é preciso voltar à equação de equilíbrio dinâmico, Eq. (29), e reescrevê-la adequadamente. Assim, combina-se a equação (29) com uma identidade, dada pela equação (33) a seguir, para se gerar uma equação matricial de maior ordem, mas formatada tal como um problema de autovalor padrão:

(33)

(34)

Então:

(35)

Definindo-se as seguintes matrizes:

(36)

A equação (35) pode ser reescrita da forma:

(37)

A relação entre as acelerações e velocidades e entre as velocidades e o deslocamento é dada por p; então, pode-se escrever o problema em questão na forma padrão de um problema de autovalor:

(38)

Sendo essa última forma muito mais simples de se resolver através de um algoritmo computacional disponível na literatura. Alguns detalhes adicionais sobre este problema podem ser colhidos em LINEARIZATION OF THE QUADRATIC EIGENVALUE PROBLEM, d. Afolabi, computers and structures.......

### 3.2 Analogia Para o Sistema em questão

NÃO SE USA EM TEXTO TÉCNICO AS PALAVRAS: NOSSA, FAZEMOS, PODEMOS ETC...

O sistema em questão (Eq. 28) tem uma ordem bem maior do que a apresentada por Przeminiecky, mas o modelo proposto por este pode ser aproveitada. Nesse sentido, usando a analogia, podem-se escrever as seguintes identidades envolvendo sistemas de equações matriciais:

(39)

(40)

(41)

Estas últimas podem ser integradas com a Eq. (28), de forma que resulta em:

(43)

Assim, pode-se organizar o sistema em duas únicas matrizes:

(44)

Por concisão, definem-se as matrizes anteriores como sendo:

(45)

Assim o sistema da Equação (44) se torna:

(46)

Tal como mostrado anteriormente, sabe-se que:

Então:

Pode-se definir a seguinte matriz coluna:

(48)

Assim, o sistema dado pela equação (44) se torna:

(49)

Ou melhor:

(53)

Ressalta-se que neste caso, diferentemente do que usualmente se encontra nas análises vibracionais em estruturas, são autovalores que podem estar relacionados às frequencias naturais. Isto é melhor examinado no item seguinte.

## 4 Aspectos numéricos

O sistema matricial abordado relaciona derivadas de quarta ordem no tempo, o que comparativamente aos problemas clássicos de autovalor, vai resultar no cálculo de uma série de valores que não correspondem exatamente às frequências naturais. As frequências naturais possuem muitas peculiaridades que não caber ser discutidas aqui; importa, sobretudo, que estas definem um movimento harmônico, pois a relação entre aceleração e deslocamento é dada exatamente por uma constante, que é o quadrado da frequência natural com sinal negativo. A importância dos movimentos harmônicos é grande; num sistema conservativo, seu movimento geral pode ser decomposto na combinação linear de movimentos independentes, cada um deles se comportando harmonicamente. Esta transformação é o cerne da análise modal.

No caso em questão, uma vez que se resolve uma equação de mais alta ordem, podem-se calcular números – os autovalores – que não estão associados às frequências naturais. Tais números podem ser complexos ou negativos, sem interesse físico. Contudo, muitas delas têm o significado harmônico, pois são números reais relacionam o deslocamento e suas derivadas.

Hurty e Rubinstein [...] fazem uma análise física dos resultados da solução de um sistema de autovalor quadrático, usado quase sempre para se empreender uma análise estrutural de um sistema com amortecimento não proporcional, em que os autovalores complexos, que aparecem aos pares conjugados, têm um significado físico associado a existência de fases no movimento do sistema, de amortecimento e consequente não periodicidade.

A obtenção de valores complexos é claramente previsível no modelo proposto. Contudo, a expectativa que o comportamento harmônico fosse encontrado naturalmente junto com outros valores espúrios, naturalmente, não se configurou. Assim, foi suposta uma relação complexa entre o deslocamento e suas derivadas, conforme apresentado usualmente na literatura, ou seja:

Onde i é a unidade complexa. Neste caso, espera-se forçosamente a ocorrência de um movimento harmônico, embora acompanhado de outros comportamentos. Assim sendo, utilizando-se da expressão anterior, as seguintes relações são obtidas:

Com tais relações, chega-se ao seguinte sistema matricial:

Este sistema, caso cada colchete seja resolvido separadamente, não fornece soluções satisfatórias para os autovalores, e razão deve estar ligada à perda de informações importantes relacionada ao conjunto da equação, que deveria ser resolvida como um todo. Ressalta-se que a solução em separado da parcela complexa do sistema:

Resultou em autovalores praticamente nulos. Contudo, a solução da outra parcela em separado retornou resultados discrepantes, ratificando a necessidade de solução conjunta do sistema, de alguma forma. Assim, entre os muitos testes efetuados, foi simulada a seguinte organização:

Na equação anterior foi feito:

Apesar da expectativa de que algum erro seja introduzido, a consideração da submatriz C negativa mudou o panorama dos resultados.

É preciso que o próprio problema de autovalor identifique os valores complexos e os calcule no contexto mais amplo dado pela equação (28).

Também é necessário melhorar o condicionamento do sistema dado pela equação matricial (44). Isto foi feito adicionando-se a certas matrizes, já apresentadas, a outras submatrizes que compõem o sistema, conforme mostrado a seguir:

Esta alteração foi fundamental para que o modelo numérico retornasse resultados próximos das freqüências naturais e mostrasse convergência com o refinamento da malha.

Ressalta-se que pela suposição de que

dddddd

Os autovalores são calculados através da rotina baseada no algoritmo Heisenberg que é preparada para calcular autovalores associados a matrizes não simétricas. Tal rotina está implementado na linguagem FORTRAN 77, como todo o programa computacional do MEC. Uma parte do código já foi testada anteriormente em outros problemas afins, de modo que possui eficácia previamente testada, inclusive por outros pesquisadores.

Cabe ressaltar que a análise de problemas de autovalor quadráticos – não de quarta ordem como os que aqui são abordados – já tem extensa pesquisa reunida ao longo dos anos, visando sobretudo a estabilidade numérica dos algoritmos, que são iterativos. Informações nesse sentido podem ser colhidos em Dumont

INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING

Int. J. Numer. Meth. Engng 2007; 71:1534–1568

Published online 6 February 2007 in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com). DOI: 10.1002/nme.1997

On the solution of generalized non-linear complex-symmetric

eigenvalue problems

N. A. Dumont∗,†

Este e o outro paper.

## 5 Simulações

São simulados apenas dois exemplos simples, pois se sabe que o modelo apresenta aproximações importantes no modelo matemático e fortes limitações no processamento computacional.

Neste trabalho usam-se elementos de contorno isoparamétricos lineares, de igual tamanho, e a interpolação feita pela MECID usa funções radiais simples e de placa fina, que tiverem desempenho já consolidado em muitas aplicações anteriores {Abraão e outros}

1. Barra engastada

O primeiro deles teste consiste de uma chapa quadrada de dimensões unitária, engastada apenas numa extremidade, como mostrado na figura:

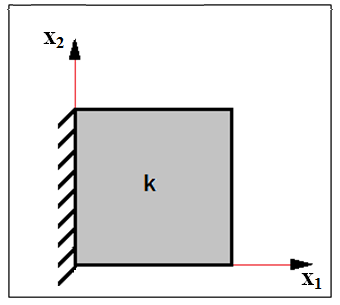
****

Figura 5 – Barra engastada numa extremidade.

As propriedades físicas e os lados da chapa foram considerados unitários, por simplicidade Os autovalores são calculados e comparados com as frequências naturais na barra, que são calculadas analiticamente pela fórmula:

As freqüências naturais incluem os valores relacionados à vibração transversa.

Primeiramente são mostrados os resultados obtidos com a função radial simples. Diversas malhas foram usadas; mas, devido as limitações da programação computacional, nenhuma malha acima de 500 graus de liberdade pode ser resolvida. Como o sistema é quatro vezes maior do que o sistema matricial clássico do MEC para calculo de autovalor, há uma dimensão declarada no programa de 2000 espaços, que para ser superada precisaria de uma reprogramação otimizada.

Em razão da relação apresentada na equação dddd, Os resultados dos autovalores calculados pelo programa estão associados ao quadrado das freqüências naturais.

Na tabela I mostram-se os resultados reais positivos para os autovalores. Na convenção aqui utilizada, tem-se número de nós de contorno/número de pontos interpolantes (NC/NI).

Função radial simples

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 84/144 | 164/144 | 164/225 | 164/324 | AO QUAD |
| 0.9795 | 0.99356 | 0.9935 | 0.99357 | 2.4699 |
| 12.486 | 12.187 | 12.175 | 12.164 | 12.3594 |
| 15.331 | 14.3830 | 14.530 | 14.658 | 22.2539 |
| 17.0923 | 17.550 | 17.243 | 17.024 | 32.1841 |
| 28.899 | 27.631 | 27.463 | 27.336 | 42.0889 |
| 39.4176 | 39.332 | 38.8032 | 38.4324 | 61.9431 |
| 54.9182 | 61.145 | 60.6144 | 60.2448 | 61. 9431 |
| 58.7938 | 91.745 | 91.9206 | 91.9650 | 71.9545 |
| 61.6538 | 93.696 | 93.047 | 92.5635 | 91.8396 |
| 91.9687 | 99.658 | 99.023 | 98.5179 | 102.0302 |
| 93.7016 | 107.737 | 107.046 | 106.453 | 111.9787 |
| 100.468 | 114.492 | 114.061 | 113.737 | 121.7712 |

Devido a aproximação feita para o cálculo da inversa da soma das matrizes, a determinação da primeira freqüência foi grandemente prejudicada. Outras mais baixas também estão bem longe da precisão devida e necessitariam de malhas mais refinadas para uma melhor qualidade dos autovalores. Certas freqüências mais altas, contudo, foram mais bem descritas, como a segunda, a quinta e a nona, que são axiais.

Comumente os modelos numéricos discretos não conseguem representar adequadamente alguns modos de vibração, especialmente os modos mais altos, que consomem mais energia e demandam uma representação espacial mais elaborada. No entanto, usando o MECID e, consequentemente, funções de base radial, a disposição dos pontos de interpolação interna em cada malha altera os resultados e não pode ser apropriada para descrever com precisão certos modos, que não são necessariamente os modos mais altos. Assim, devido a esse comportamento do MECID, sempre são esperadas algumas oscilações na curva de diferença relativa quando a posição dos pontos de interpolação é alterada.

Apesar das imprecisões nos resultados, observa-se uma convergência nos resultados numéricos. Os resultados com melhor qualidade não puderam ser obtidos devido às aproximações no modelo matemático. Tal convergência não havia sido obtida em outros modelos testados.

Na tabela II a seguir são apresentados os resultados para o mesmo problema usando a função radial de placa fina.

Pode-se notar uma certa dispersão na sequência de frequências calculadas, no sentido de que a medida que se efetuou o refinamento, alguns autovalores mais altos desceram da escala de ordenamento e se introduziram mais abaixo, e vice versa. A malha mais refinada (164/324) mostra claramente esse efeito, se comparada à malha com (164/225).

FUNÇÃO LOG ENGASTE

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 84/144 | 84/225 | 164/144 | 164/225 | 164/324 | ω2 |
| 0.9795 | 0. 97958 | 0.99357 | 0. 99357 | 0.99356 | 2.4699 |
| 12.3396 | 12.3416 | 12.089 | 12.0893 | 12.0866 | 12.3594 |
| 16.8735 | 17.1068 | 15.596 | 15.8912 | 25.5561 | 22.2539 |
| 33.4516 | 34.0601 | 17.370 | 16.8832 | 36.3417 | 32.1841 |
| 42.5878 | 45.1677 | 25.634 | 25.6059 | 57.9543 | 42.0889 |
| 51.0394 | 49.7525 | 37.048 | 36.6269 | 91.9149 | 61.9431 |
| 59.8150 | 59.4087 | 58.3916 | 58.1349 | 102.4377 | 61. 9431 |
| 74.6862 | 76.9945 | 91.9151 | 91.9295 | 108.660 | 71.9545 |
| 88.0378 | 86.8812 | 103.246 | 102.769 | 126.0980 | 91.8396 |
| 92.1106 | 92.1179 | 108.589 | 108.650 | 159.8708 | 102.0302 |
| 102.746 | 102.425 | 126.443 | 126.198 | 168.8214 | 111.9787 |
| 107.9749 | 108.034 | 159.370 | 159.763 | 182.5951 | 121.7712 |

1. Membrana quadrada

Para testar o método anteriormente apresentado será introduzido o problema de vibração em membrana quadrada, que também possui solução analítica. Tais resultados serão comparados com o retornado pelo MECID. A figura ... mostra as características físicas e geométricas do problema, que possui dimensões e propriedades unitárias também unitárias por conveniência.

Os valores analíticos são para frequências naturais apresentados por Meirovitch (1967) e definidos conforme a seguinte expressão:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (7.24) |

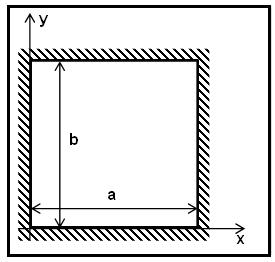


Figura 3 – Membrana retangular totalmente fixada. Fonte: Autoria própria.

Este exemplo tem um comportamento numérico algo distinto do anterior. Os graus de liberdade, fundamentais na análise dinâmica, são dados exclusivamente pelos pontos internos interpolantes, enquanto no caso anterior apenas um quarto dos pontos nodais havia sido eliminado do sistema matricial. Assim, este problema é numericamente bem mais difícil de modelar qualitativamente do que o caso previamente estudado.

O fato de que os graus interpolantes do contorno também são eliminados faz com que a quantidade de pontos internos interpolantes cresça em importância no modelo discreto.

Os resultados obtidos refletem esta maior dificuldade numérica; os autovalores agora calculados estão bem menos precisos do que os calculados anteriormente. Apenas a função radial simples foi empregada na interpolação.

FUNÇÃO radial simples

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 84/144 | 84/225 | 164/144 | 164/225 | 164/324 | ω2 |
| 8.61064 | 8.5451 | 8.59140 | 8.5451 | 8.51465 | 19.7391 |
| 18.1600 | 17.8710 | 18.13464 | 17.8710 | 17.69990 | 49.3478 |
| 18.2828 | 17.8873 | 18.14557 | 17.8873 | 17.72035 | 49.3478 |
| 45.0311 | 44.0385 | 44.66674 | 44.038 | 43.63456 | 78.9556 |
| 59.6519 | 58.9881 | 59.53348 | 58.988 | 58.63164 | 98.6943 |
| 61.8291 | 61.1692 | 61.95456 | 61.169 | 60.63612 | 98.6943 |
| 82.6897 | 81.4169 | 82.41250 | 81.4169 | 80.77194 | 128.3032 |
| 83.7839 | 81.5618 | 82.51100 | 81.5618 | 80.95417 | 128.3032 |
| 106.4193 | 105.4033 | 106.6581 | 105.4033 | 104.5291 | 167.9406 |
| 106.5278 | 105.4156 | 106.6665 | 105.4133 | 104.5446 | 167.9406 |
| 135.0431 | 131.9681 | 133.5834 | 131.9680 | 130.9164 | 177.6515 |
| 138.1356 | 135.2091 | 136.7063 | 135.2091 | 134.2057 | 197.3912 |

## 5 Conclusões

Uma vez que a formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta obteve melhores resultados do que a formulação regularizada em problemas de diretos governados pela Equação de Helmholtz, procurou-se analisar a possibilidade e aplicá-la em problemas de autovalor e futuramente em problemas de resposta, usando a Equação da Onda.

Nesse sentido, examinaram-se os procedimentos matemáticos capazes de conduzir o modelo autorregularizado do MECID a uma forma pertinente a um problema de autovalor.

Contudo, embora haja modelos similares para o problema dito quadrático, o caso em questão é muito mais complicado, pois é de quarta ordem e arrola uma estrutura em que cada matriz constitutiva do sistema está multiplicada pelo coeficiente associado ao autovalor.

Para que se chegar ao intento desejado, uma aproximação foi feita no cálculo das derivadas do potencial, que são eliminadas no modelo de um problema de autovalor. Tal aproximação, além de outros problemas numéricos que não puderam ser melhor estudados, fizeram com que os resultados numéricos alcançados ficassem aquém do desejado.

Resta, todavia, ressaltar que objetivo foi alcançado pois um procedimento matemático consistente foi aplicado e que não se pode identificar trabalhos similares na literatura.

Assim, o uso da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno deve ser aplicada apenas na obtenção do espectro de frequências via resposta direta, pois que seus resultados nessa classe foram bastante precisos, o que não se pode reproduzir no caso do cálculo dos autovalores associados.

## 5Referências

[1] Loeffler, C. F., Galimberti, R., Barcelos, H. M. 2018. A self-regularized scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions;

[2] Loeffler, C. F., Cruz, A. L., Bulcão, A. 2015. Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 50, pp. 97-108.

[3] Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W.J., Bulcão, A. 2015. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 61, pp. 218-225.

[4] Loeffler, C. F., Zamprogno, L., Mansur, W. J., Bulcão, A. 2017. Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. Computational Methods and Engineering and Sciences, Vol. 113, 3, pp. 387-412.

[5] Loeffler, C. F., Pereira, P. V. F., Lara, L. O. C., Mansur, W. J., 2017. Comparison between the Formulation of the Boundary Element Method that uses Fundamental Solution Dependent of Frequency and the Direct Radial Basis Boundary Element Formulation for Solution of Helmholtz Problems, Eng. Analysis Boundary Elements, 79, pp. 81-87.

[6] Loeffler, C.F, Mansur, WJ, 2017. A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem. Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 74, pp. 14-18.

[7] Przemieniecki, J.S., 1985. Theory of matrix structural analysis. Courier Corporation.

Melhorar a quantidade de referências